國立高雄師範大學九十四學年度博士班招生考試試題

系所別：科學教育研究所

科　目：分析與代數（全一頁）

1. (a) Find $\lim_{x\to+\infty} x\log\frac{x+1}{x-1}$ （8%）

(b) Suppose $F(y)=\int_{\sin y}^{e^y}\sqrt{1+x^3}\,dx$**, find** $F'(y)$**.** （7%）

2. Suppose S **is a closed and bounded point set, and suppose the function** f **is defined and continuous at each point of** S**. Prove that** f **is uniformly continuous on** S**.** （10%）

3. (a) Let $p\in Z$ **be a prime. Suppose that** $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ **is in** $Z[x]$**, and** $a_n\neq 0(\text{mod } p)$**, but** $a_i=0(\text{mod } p)$ **for** $i<n$**, with** $a_0\neq 0(\text{mod } p^2)$**. Prove that** $f(x)$ **is irreducible over** Q**.** （10%）

(b) Is $2x^3+x^2+2x+2$ **an irreducible polynomial in** $Z_5[x]$**? Why? Express it as a product of irreducible polynomials in** $Z_5[x]$**.** （5%）

4. Prove that a continuous map f **of** E^n **into itself has a fixed point for** $n\geq 1$**.** （10%）

5. If f is a real-valued continuous function on a compact set, show that f(K) is compact. （6%）

6. Let $f_n(x)=\frac{n^2x}{(1+n^3x^2)}$, $0\leq x\leq 1$,

Does $\{f_n\}$ **converge uniformly on [0,1]? How about** $[\varepsilon,1]$**,** $0<\varepsilon<1$**?** （6%）

7. **Find the volume of the solid that lies outside the cone** $z^2=x^2+y^2$ **and inside the sphere** $x^2+y^2+z^2=1$**.** （6%）

8. **(a) Show that every Riemann integrable function defined on [a,b] is a measurable function on [a,b].** （4%）

(b) Give an example of a nonmeasurable function. （3%）

9. **Let** H **be a subgroup of a group** G **and let** $a\in G$, $|a|=n$**. If** m **is the smallest positive integer such that** $a^m\in H$, **show that** $m|n$**.** （7%）

10. **Prove that an abelian group** $G\neq\{1\}$ **is simple if and only if it is cyclic of prime order.** （6%）

11. **Find a splitting field E of** $f(x)=x^3-5$ **over** □ **such that** $[E:□]=6$**.** （6%）

12. **If** F **is a field, describe the factor ring** $F[x]/<x^2>$ **.** （6%）